

第3讲 一次函数与轴对称综合

一、一次函数与等腰三角形综合

🔗 两圆一线

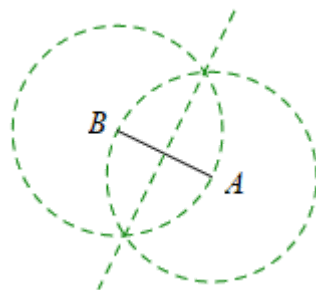
前提：“两定一动”型等腰三角形可借助“两圆一线”定性分析：

如图，使 $\triangle ABC$ 构成等腰三角形的点 C 必在“两圆一线”上，

①所谓两圆，即分别以点_____为圆心，线段_____的长为半径作圆，对应以_____为_____的两种情形；

②所谓一线，即线段 AB 的_____，对应以_____为_____的一种情形；

此“两圆一线”上除不能构成三角形的点外，皆为所求点 C 。



🔗 代数法

前提：该三角形三边的平方为常数或者关于某个参数的二次式；

步骤：

①写出或设出三角形三个顶点的坐标；

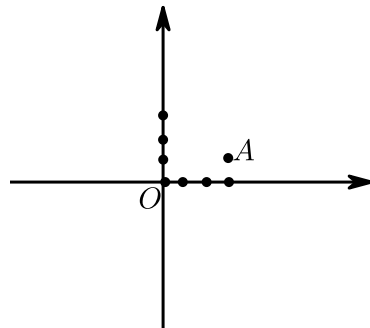
②利用_____（或_____），计算三角形三条边长的平方；

③由等腰三角形的三边长（的平方）可以两两相等，需分_____，列方程求解；

④_____求出的点是否符合题意，即是否能构成三角形。

例题1

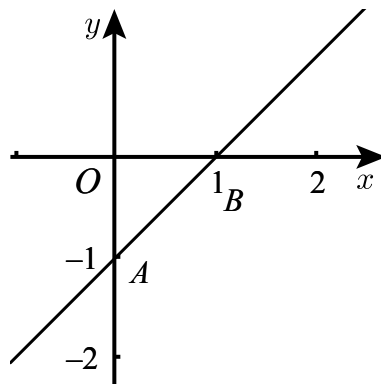
1. 在平面直角坐标系中，点 $A(3, 1)$ 、 $O(0, 0)$ 。



- (1) 在 x 轴上找一点 P ，使得 $\triangle OAP$ 是以 OA 为腰的等腰三角形，则满足条件的点 P 有几个。
- (2) 在坐标轴上找一点 P ，使得 $\triangle OAP$ 是以 OA 为腰的等腰三角形，则满足条件的点 P 有几个。
- (3) 在坐标轴上找一点 P ，使得 $\triangle OAP$ 是等腰三角形，则满足条件的点 P 有几个。
- (4) 在 $x = 2$ 上找一点 P ，使得 $\triangle OAP$ 是等腰三角形，则满足条件的点 P 有几个。

练习1

2. 直线 $y = x - 1$ 与两坐标轴分别交于 A 、 B 两点，点 C 在坐标轴上，若 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，则满足条件的点 C 最多有 _____ 个。



例题2

3. 如图1，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = -2x + 8$ 的图象与 x 轴， y 轴分别交于点 A ，点 C ，过点 A 作 $AB \perp x$ 轴，垂足为点 A ，过点 C 作 $CB \perp y$ 轴，垂足为点 C ，两条垂线相交于点 B 。

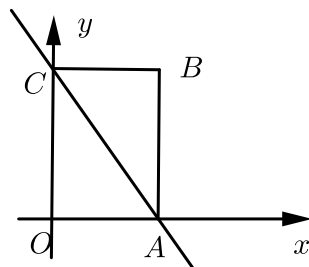


图1

- (1) 线段 AB ， BC ， AC 的长分别为：

$AB = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $BC = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $AC = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

- (2) 折叠 $\triangle ADC$ ，使点 A 与点 C 重合，再将折叠后的图形展开，折痕 DE 交 AB 于点 D ，交 AC 于点 E ，连接 CD ，如图2。

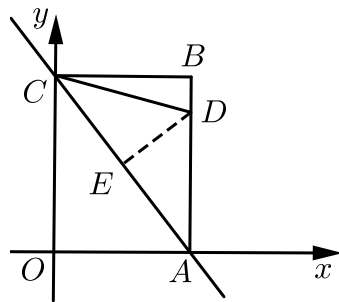


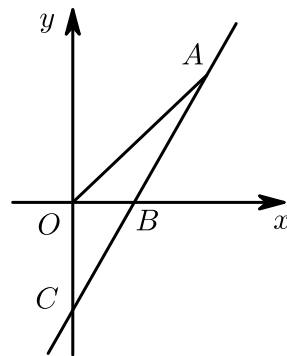
图2

- ① 点 D 的坐标；
- ② 在 y 轴上，是否存在点 P ，使得 $\triangle APD$ 为等腰三角形。若存在，请直接写出符合条件的所有点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

练习2

4. 直线 $y = \frac{4}{3}x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 和点 B ，在 x 轴上取点 C ，使 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，则点 C 的坐标是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 如图所示, 直线 $y = kx - 2$ 与 x 轴, y 轴分别交于点 B , C , 且 $OC = 2OB$, A 为直线 BC 上一动点.

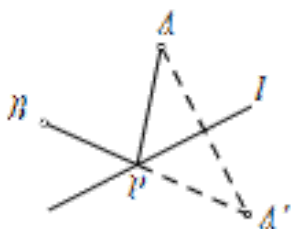


- (1) 求点 B 的坐标和 k 的值.
- (2) 当 $\triangle AOB$ 的面积是4时, 求点 A 在第一象限的坐标.
- (3) 在(2)的条件下, 在 x 轴上是否存在一点 P , 使 $\triangle POA$ 是等腰三角形? 若存在, 请直接写出满足条件的所有点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

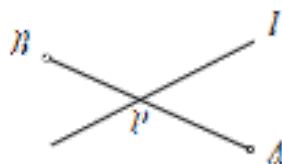
二、一次函数与最短路径综合

🕒 线段和 $|PA + PB|$ 最小值

同侧

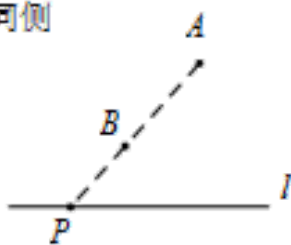


异侧

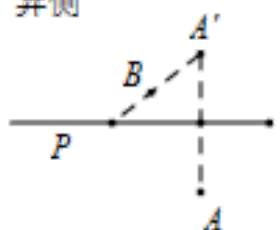


🕒 线段差 $|PA - PB|$ 最大值

同侧

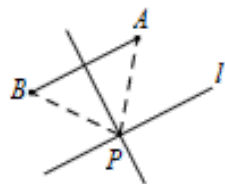


异侧

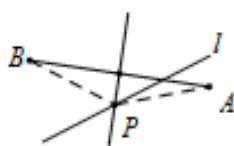


🕒 线段差 $|PA - PB|$ 最小值

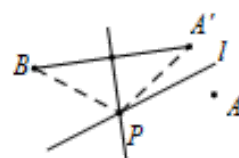
同侧



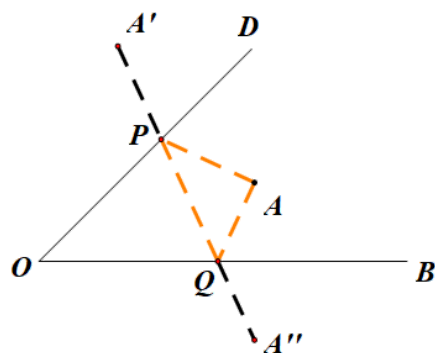
异侧



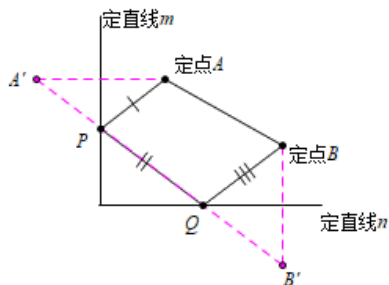
异侧



🕒 三角形周长最小值

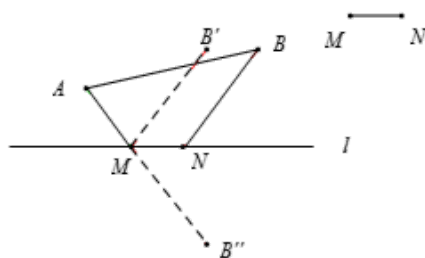
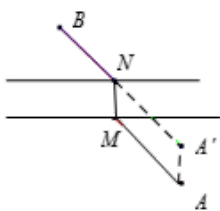


💡 四边形周长最小值

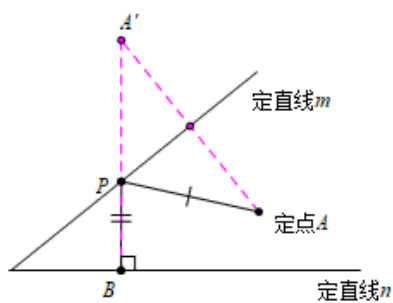


💡 过河问题

过河最短距离、定长问题

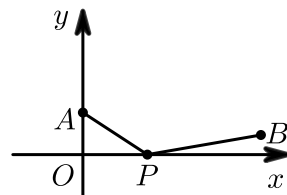


💡 “一定两动”型



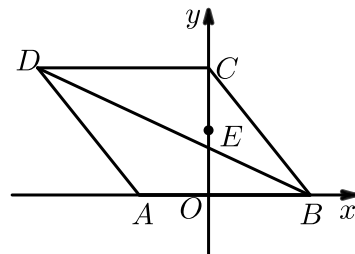
|| 例题3

6. 如图，在平面直角坐标系中， $A(0, 1)$ ， $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$ ， P 为 x 轴上一动点，则 $PA + PB$ 最小时点 P 的坐标为 _____ .



练习3

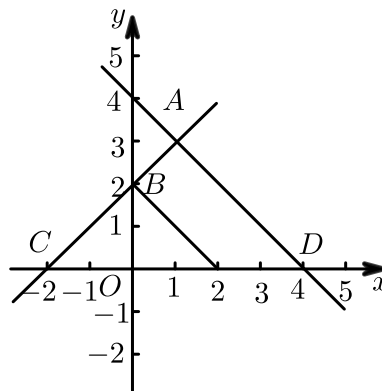
7. 如图，菱形四边形 $ABCD$ 中， $B(3, 0)$ ， $C(0, 4)$ ， $D(-5, 4)$ 。



(1) 点 A 的坐标为 _____。

(2) 点 $E(0, 2)$ ，若 P 为 BD 上一动点，当 $CP + PE$ 取最小值时，点 P 的坐标为 _____。

8. 如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = x + 2$ 的图象与一次函数 $y = kx + b$ 的图象相交于点 $A(1, 3)$ ，一次函数 $y = x + 2$ 的图象交 x 轴负半轴于点 C ，交 y 轴正半轴于点 B 。



(1) 根据图象直接回答，不等式 $x + 2 < kx + b$ 的解集。

(2) 如果 $D(4, 0)$ ，请写出 $\triangle ACD$ 的面积。

(3) 在 x 轴是否存在一点 M ，使 $AM + BM$ 的值最小？若存在，请求出此时点 M 的坐标。

例题4

9. 在直角坐标系中，有点 $A(-1, -5)$ ， $B(1, 1)$ ，点 P 在 x 轴上且使得 $|PA - PB|$ 最大，求 P 点坐标。

练习4

10. 正方形 $OABC$ 的边长为2，其中 OA 、 OC 分别在 x 轴和 y 轴上，如图1所示，直线 l 经过 A 、 C 两点。

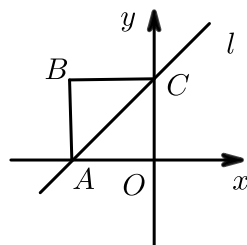


图1

- (1) 若点 P 是直线 l 上的一点，当 $\triangle OPA$ 的面积是3时，请求出点 P 的坐标。
- (2) 如图2，坐标系 xOy 内有一点 $D(-1, 2)$ ，点 E 是直线 l 上的一个动点，请求出 $BE + DE$ 的最小值和此时点 E 的坐标。

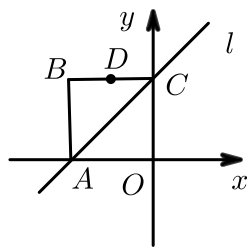
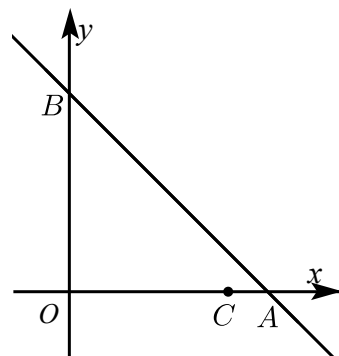


图2

- (3) 若点 F 和点 D 关于 x 轴对称，求出 $|BE - FE|$ 的最大值，并求出此时点 E 的坐标。

|| 例题5

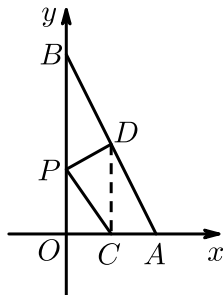
11. 如图，直线 $y = -x + 5$ 分别与 x 轴、 y 轴交于 A 、 B 两点。



- (1) 求 A 、 B 两点的坐标。
- (2) 已知点 C 坐标为 $(4, 0)$ ，设点 C 关于直线 AB 的对称点为 D ，请直接写出点 D 的坐标。
- (3) 请在直线 AB 和 y 轴上分别找一点 M 、 N 使 $\triangle CMN$ 的周长最短，在平面直角坐标系中作出图形，并求出点 N 的坐标。

练习5

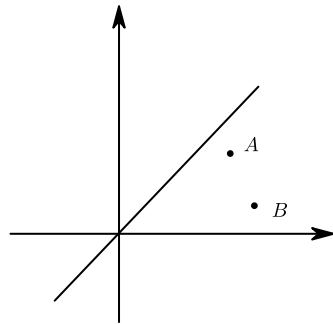
12. 一次函数 $y = kx + b$ 的图象与 x 、 y 轴分别交于点 $A(2, 0)$ ， $B(0, 4)$ ， O 为坐标原点。



- (1) 设 OA 、 AB 的中点分别为 C 、 D ， P 为 OB 上一动点，求 $PC + PD$ 的最小值，并求此时 P 点的坐标。
- (2) 设 OB 的中点为 P ， C 、 D 分别为 OA 、 AB 上的动点，求 $\triangle PCD$ 周长的最小值，并求此时 C 、 D 两点的坐标。

例题6

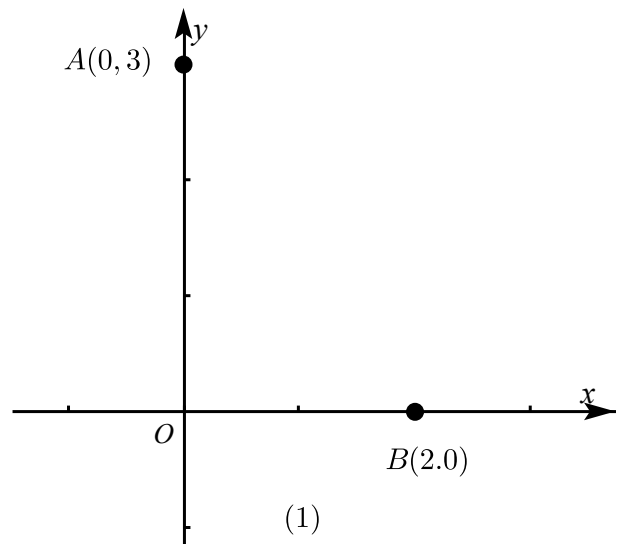
13. 如图，在平面直角坐标系中，有点 $A(5, 2)$ ， $B(6, 1)$ ， $M(m, m)$ ， $N(n, 0)$ ， $AN + NM + MB$ 的值最小时，求直线 MN 的解析式及 m ， n 的值，并求出最小值。



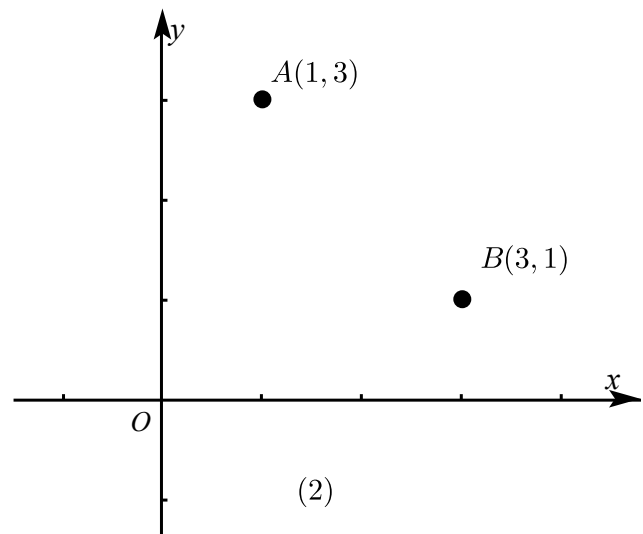
练习6

14. 按要求解答问题：

(1) 如图(1)，点 C 的坐标为 $(3, y)$ ，使 $\triangle ABC$ 的周长最小，求 y 的值和 $\triangle ABC$ 的周长最小值。

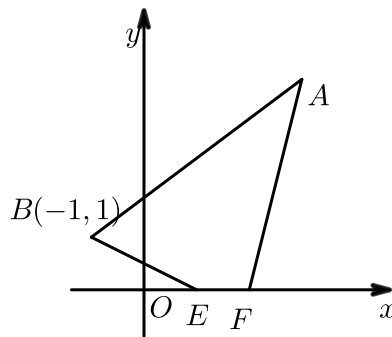


(2) 如图(2)，在 x 轴上有一点 C ，在 y 轴上有一点 D ，使 $AD + CD + BC$ 值最小，求直线 CD 的解析式及点 C ， D 坐标和 $AD + CD + BC$ 的最小值。



例题7

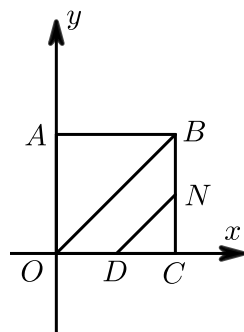
15. 如图，平面直角坐标系中，已知点 A 的坐标为 $(3, 4)$ ，点 B 的坐标为 $(-1, 1)$ 时，在 x 轴上另取两点 E ， F ，且 $EF = 1$ ．线段 EF 在 x 轴上平移，线段 EF 平移至何处时，四边形 $ABEF$ 的周长最小？求出此时点 F 的坐标．



练习7

16. 在平面直角坐标系中， AB 两点的坐标分别为 $A(3, 2)$ ， $B(1, 5)$ ．
- (1) 若点 P 的坐标为 $(0, m)$ ，当 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 时， $\triangle PAB$ 的周长最短．
 - (2) 若点 CD 的坐标分别为 $(0, a)$ 、 $(0, a + 4)$ ，则当 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 时，四边形 $ABDC$ 的周长最短．

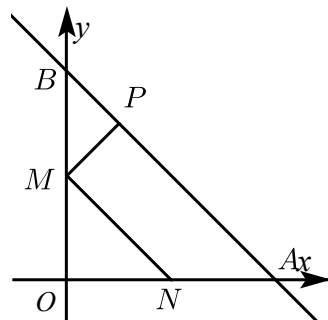
17. 如图，在平面直角坐标系中，正方形 $OABC$ 的顶点 O 在坐标原点，顶点 C 、 A 分别在 x 轴、 y 轴的正半轴上，边长为4，点 N 是边 BC 的中点，点 D 是边 OC 的中点。



- (1) 正方形 $OABC$ 的对角线 OB 的长为 _____ ； DN 的长为 _____ 。
- (2) 直线 OB 的解析式为 _____ 。
- (3) 求直线 AD 与直线 OB 的交点坐标。
- (4) 若点 P 、 Q 是直线 OB 上的两个动点，且 P 点的纵坐标大于 Q 点的纵坐标， $PQ = \frac{1}{2}OB$ 。当四边形 $CQPN$ 的周长最小时，求点 Q 的坐标，并求出此时四边形 $CQPN$ 的周长。

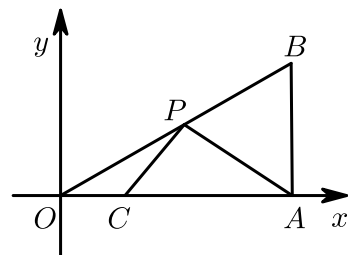
例题8

18. 如图所示，已知点 $N(1, 0)$ ，直线 $y = -x + 2$ 与两坐标轴分别交于 A 、 B 两点， M 、 P 分别是线段 OB 、 AB 上的动点，则 $PM + MN$ 的最小值是 _____ 。



练习8

19. 在 $\text{Rt}\triangle OAB$ 中, $\angle OAB = 90^\circ$, $\angle BOA = 30^\circ$, $OA = 3$, 以 O 为原点, OA 所在的直线为 x 轴, 建立如图所示的直角坐标系, 点 C 的坐标为 $(\frac{1}{2}, 0)$, 点 P 为斜边 OB 上的一个动点, 当 $PA + PC$ 取最小值时.



- (1) 在图中确定点 P 的位置, 并保留作图痕迹 (不要求尺规作图).
- (2) 求出 $PA + PC$ 的最小值.